Berlyn 1966

D Heiss

Selbstkonsistente Berechnung der 1-1- und 3-3-Amplitude für die Pion-Nukleonstreuung im Niederenergiebereich

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK - LEIDEN

vorgelegt von

Dieter Heiß

aus Donaueschingen

Referenten:

Prof. Dr. P. BECKMANN
Prof. Dr. F. PENZLIN
Prof. Dr. W. THEIS

Datum der mündlichen Prüfung:

20. Juli 1965

Tag der Promotion: 16. JULI 1965

Inhaltsverzeichnis

		Seite
Einleitung		1
§ 1	Kinematik und Partialwellenzerlegung	5
§ 2	Einteilchenaustausch	9
§ 3	Nukleonpol und 3-3-Resonanz	15
§ 4	Näherungsweise selbstkonsistente Berechnung von m^2, M^2, $g^2/4\pi$ und Γ.	18
§ 5	Numerisches	28
§ 6	Schlußfolgerungen	31
Graphische Darstellungen		33
Anhang I		36
Anhang II		38
Literaturverzeichnis		41
Lebenslauf		42

Einleitung 1

§ 1 Klassische und relativistische Mechanik 2

§ 2 Minkowski-Raum 8

§ 3 Lorentztransformationen und Poincaré-Gruppe 10

§ 4 Anhang I 30

Anhang II 38

Literaturverzeichnis 41

Index 43

Einleitung

Die Grundlage für alle Berechnungen der Pion-Nukleonstreuamplitude sind die Regularitätseigenschaften der Partialwellenamplituden. Mit ihrer Kenntnis und aus dem Verhalten im Unendlichen lassen sich Dispersionsrelationen für die Partialwellen aufstellen. Aus der Mandelstam-Darstellung[1] für die invarianten Amplituden wurden diese Regularitätseigenschaften von MAC DOWELL und FRAZER und FULCO[2] hergeleitet.

Danach sind die Partialwellenamplituden reguläre Funktionen in der geeignet aufgeschnittenen s-Ebene, wobei s das Quadrat der Gesamtenergie im CMS für den betrachteten Prozeß ist. Ein Schnitt verläuft längs der positiv reellen s-Achse beginnend bei der Schwelle $(m_{Nukleon} + m_{Pion})^2$. Man nennt diesen Schnitt üblicherweise den rechten Schnitt oder auch Unitaritätsschnitt, weil auf diesem Schnitt die Partialwellenamplituden im elastischen Bereich der Unitaritätsbeziehung genügen. Außerdem existiert noch ein kompliziertes Schnittgebilde, welches summarisch als linker Schnitt bezeichnet wird. Als zum rechten Schnitt gehörig wird oft auch der Nukleonpol gezählt. Dieser Pol bei $s = m^2_{Nukleon}$ ist aus den streng bewiesenen Dispersionsrelationen wohl bekannt. In der Mandelstam-Darstellung kann daher der Nukleonpol als am besten begründet angesehen werden.

Bei der Behandlung der Pion-Nukleon-Streuung spielen die linken Schnitte eine Rolle, die mit der des Potentials in der nichtrelativistischen Quantenmechanik vergleichbar ist[3]. Daher hat sich auch die Bezeichnung "Kräfteschnitte" eingebürgert. Den langreichweitigen Kräften entsprechen die Beiträge der Dispersionsintegrale über die Schnitte, welche sehr nahe bei der elastischen Schwelle liegen, während die Beiträge von entfernter liegenden Schnitten kurzreichweitigen Kräften entsprechen.

Ein wesentlicher Punkt der Mandelstam-Darstellung ist die Tatsache, daß durch eine einzige analytische Funktion drei verschiedene Streuprozesse beschrieben werden. Gemeint sind die Prozesse, die auseinander hervorgehen, wenn

ein einlaufendes Teilchen durch sein Antiteilchen, welches ausläuft, und ein auslaufendes Teilchen durch sein Antiteilchen, welches einläuft, ersetzt wird. Üblicherweise werden diese drei Prozesse als die drei Kanäle bezeichnet, die bei einem Prozess mit zwei ein- und zwei auslaufenden Teilchen auftreten. In der Pion-Nukleonstreuung sind das die folgenden Prozesse:

$$\pi_1 + N_1 \rightarrow \pi_2 + N_2 \qquad \text{s-Kanal}$$

$$\bar{\pi}_2 + N_1 \rightarrow \bar{\pi}_1 + N_2 \qquad \text{u-Kanal}$$

$$\pi_1 + \bar{\pi}_2 \rightarrow \bar{N}_1 + N_2 \qquad \text{t-Kanal}$$

Da nach den heutigen Erkenntnissen die starke Wechselwirkung invariant bei Zeitumkehr und Ladungskonjugation ist, unterscheiden sich die Prozesse $N_1 + \bar{N}_2 \rightarrow \bar{\pi}_1 + \pi_2$ oder $\pi_1 + \bar{N}_2 \rightarrow \bar{N}_1 + \pi_2$, zu denen man auch hätte kommen können, in ihrer Beschreibung nicht von den bereits angegebenen.

Die invarianten Größen s, t und u sind die Quadrate der Gesamtenergien im CMS des jeweils betrachteten Prozesses. Nach MANDELSTAM gibt es eine analytische Funktion in diesen Variablen derart, daß die physikalische Amplitude zur Beschreibung eines Kanals mit dieser einen Funktion identisch ist, wenn die Variablen s, t und u die physikalischen Werte des betrachteten Kanals annehmen.

Die eingangs erwähnten linken Schnitte der Partialwellen in der s-Ebene, insbesondere der Sprung der Amplituden über diese Schnitte, hängen nach MANDELSTAM unmittelbar mit dem Streuprozeß im t- und u-Kanal zusammen.

Aus Näherungsansätzen in diesen Kanälen gewinnt man durch Partialwellenprojektion den Sprung über die linken Schnitte. Der Sprung über den rechten Schnitt ergibt sich aus der Unitarität und der Inelastizität. Unter Benutzung der Dispersionsrelationen läßt sich daraus die Amplitude im s-Kanal bestimmen. Anschaulich dürfen wir sagen, daß wir aus einem vorgegebenen Potential die Streuamplitude berechnen.

So haben FRAUTSCHI und WALECKA[4] als Näherung für den u- und t-Kanal den Nukleon-, den Isobaren und den ρ-Austauschprozeß betrachtet. Das Ergebnis dieser Rechnung war ein Resonanzverhalten der Streuamplitude in der $P_{3/2\,3/2}$-Welle. Die auf dem linken Schnitt eingesetzten Parameter, d.h. die Massen und Kopplungskonstanten des Nukleons, des Isobars, und des ρ-Mesons wurden dem Experiment entnommen.

Bei der Pion-Nukleonstreuung ist der Prozeß im s-Kanal mit dem Prozeß im u-Kanal identisch, so daß es eigentlich unbefriedigend ist, im u-Kanal etwas einzusetzen, was im s-Kanal erst ausgerechnet werden soll. Der Zusammenhang der Streuamplituden in den beiden Kanälen heißt die Crossingsymmetrie. In unserem Fall hat man lediglich s durch u zu ersetzen, um vom s- zum u-Kanal zu gelangen. Man kann daher eine selbstkonsistente Rechnung durchführen, indem man eine Übereinstimmung der auf dem linken Schnitt (u-Kanal) eingesetzten Parameter mit den auf dem rechten Schnitt (s-Kanal)errechneten Parametern erzwingt. Im t-Kanal haben wir jedoch einen anderen Streuprozeß vor uns, so daß die dort eingesetzten Parameter freie Parameter sind.

Eine solche selbstkonsistente Berechnung wurde von verschiedenen Autoren durchgeführt[5]. So haben ABERS und ZEMACH[5] in der 1-1-Welle auf dem linken Schnitt neben dem Nukleonenaustausch auch den ρ-Austausch und den Austausch der 3-3-Resonanz berücksichtigt. Die Massen und Breiten der 3-3-Resonanz und des ρ-Mesons wurden dem Experiment entnommen, die Nukleonmasse und die π-N-Kopplungskonstante selbstkonsistent errechnet. Umgekehrt haben diese Autoren in der 3-3-Welle die Masse und Breite der 3-3-Resonanz aus der Nukleonmasse und der π-N-Kopplungskonstanten selbstkonsistent errechnet, indem sie auch von den beiden Austauschprozessen ausgingen. In diesen Rechnungen ist die Rolle des Nukleons im 1-1-Kanal die gleiche wie die des N^* im 3-3-Kanal. Wir sehen, daß unter einer solchen Betrachtungsweise der Begriff "Elementarteilchen" verschwimmt, es besteht hier kein Grund, das Nukleon für elementarer zu halten als das N^*.

Die Frage liegt nahe, ob es nicht möglich ist, die Parameter mehrerer Teilchen gleichzeitig selbstkonsistent zu errechnen. In der Tat haben CHEW und FRAUTSCHI[6] diesen Vorschlag gemacht.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist diese selbstkonsistente Berechnung der Massen des Nukleons und der 3-3-Resonanz und der Pion-Nukleonkopplungskonstanten sowie der Resonanzbreite.

Wir gehen auch vom N/D-Ansatz aus[7], begnügen uns aber mit nur einem Iterationsschnitt der Integralgleichungen[8].

Das ermöglicht eine gleichzeitige selbstkonsistente Berechnung der gesuchten Parameter aus beiden Partialwellen. Wir sehen uns nicht genötigt, zur Berechnung des Nukleonpoles die Masse und Breite des N^* vom Experiment als gegeben anzunehmen, wie es von ABERS und ZEMACH durchgeführt wurde.

Der Schwierigkeit, daß die Integrale divergieren, begegnen wir dadurch, daß wir außer der Normierungssubtraktion für D eine weitere Subtraktion an der Schwelle durchführen, so daß es keines Abschneideparameters bedarf.

Während bei der exakten Durchführung des N/D-Verfahrens das Schwellenverhalten nicht garantiert wird, ist in unserm Verfahren das Schwellenverhalten erfüllt. Die Subtraktionskonstanten lassen sich darum in einfacher Weise mit den experimentell bekannten Streulängen in Beziehung setzen.

§ 1 Kinematik und Partialwellenzerlegung

In dem Prozeß $N + \pi \rightarrow N' + \pi'$ bezeichnen wir mit q_1 und q_2 die Vierer-impulse des ein- bzw. auslaufenden Pions, entsprechend seien p_1 und p_2 die Nukleonviererimpulse. Wir benutzen die üblichen Lorentz-Invarianten

$$s = (p_1 + q_1)^2 = (p_2 + q_2)^2$$

$$t = (q_2 - q_1)^2 = (p_2 - p_1)^2 \qquad (1.1)$$

$$u = (p_2 - q_1)^2 = (q_2 - p_1)^2$$

wobei das skalare Produkt zweier Vierervektoren a und b durch $a_o b_o - \vec{a}\vec{b}$ definiert ist. Dann gilt stets

$$s + t + u = 2(m^2 + \mu^2)$$

mit $p_1^2 = p_2^2 = m^2$

$q_1^2 = q_2^2 = \mu^2$

W sei die Gesamtenergie im CMS, im s-Kanal ist $W^2 = s$, und das Quadrat des Impulses im CMS ist gegeben durch

$$k^2 = \frac{(W^2 - (m+\mu)^2)(W^2 - (m-\mu)^2)}{4W^2} \qquad (1.2)$$

Man nennt im s-Kanal t die Impulsübertragung, im CMS besteht zwischen t und dem Streuwinkel ϑ der Zusammenhang

$$\cos\vartheta = 1 + \frac{t}{2k^2} \qquad (1.3)$$

Wir definieren die Streuamplitude T durch

$$\langle p_2 q_2 | S | p_1 q_1 \rangle - 2p_0 \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)\, 2q_0 \delta(\vec{q}_1 - \vec{q}_2) =$$

$$= 2i\delta(p_1 + q_1 - p_2 - q_2)\, T \qquad (1.4)$$

Für die Pion-Nukleonstreuung läßt sich das T-Matrixelement zwischen einem Anfangszustand, in dem das Nukleon durch den Diracspinor $u_i(p) = \frac{\gamma p + m}{\sqrt{p_0 + m}}\,\chi_i$

beschrieben wird, und einem Endzustand mit dem Nukleonspinor $u_f(p)$ in folgende allgemeine Form bringen:

$$(1.5)\quad T_{fi}(s,t) = \bar{u}_f(p_2)\left(A(s,t) + \tfrac{1}{2}\gamma(q_1+q_2)B(s,t)\right)u_i(p_1)$$

Die χ_i und χ_f genügen der Gleichung $\gamma_0\chi = \chi$, sie sind normiert durch $\chi^+_\alpha\chi_{\alpha'} = \delta_{\alpha\alpha'}$.

Die Koeffizienten $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ sind in den Isospinvariablen *) noch Matrizen. Wir definieren die invarianten Funktionen A^+ und A^- durch

$$(1.6)\quad \mathbf{A}^{\rho\sigma}_{\beta\alpha} = \delta_{\beta\alpha}A^+ + \tfrac{1}{2}[\tau_\beta,\tau_\alpha]_-A^-$$

α und β sind die Isospinkomponenten des ein- bzw. auslaufenden Pions, die des Nukleons, ρ und σ ; wurden auf der rechten Seite nicht explizit angeschrieben. In diesen Variablen steht im ersten Summanden eine Einheitsmatrix, im zweiten Summanden ein Kommutator der Pauli-Matrizen. Zum Gesamtisospin 1/2 und 3/2 erhält man die Amplituden aus

$$(1.7)\quad \begin{aligned} A^{3/2} &= A^+ - A^- \\ A^{1/2} &= A^+ + 2A^- \end{aligned}$$

Dieselben Beziehungen gelten für B.
In den folgenden Formeln dieses Paragraphen lassen wir die Isospinindizes stets weg, die Formeln gelten in gleicher Weise für den Gesamtisospin 3/2 und 1/2.

Im Schwerpunktsystem läßt sich die Unitaritätsbeziehung für die Partialwellen besonders einfach ausdrücken, das T-Matrixelement kann in diesem System in die folgende Form gebracht werden:

$$(1.8)\quad T_{fi} = \chi^+_f\left(f_1 + \frac{\vec{\sigma}\vec{q}_1\cdot\vec{\sigma}\vec{q}_2}{|q_1||q_2|}f_2\right)\chi_i$$

*) Wir haben die Isospinfunktionen des Nukleons und Pions in (1.5) nicht explizit angeschrieben.

f_1 und f_2 hängen mit den oben eingeführten Funktionen A und B zusammen durch

$$(1.9) \qquad \begin{aligned} f_1 &= (E+m)\,(A + (W-m)B) \\ f_2 &= (E-m)\,(-A + (W+m)B) \end{aligned}$$

wobei $E = \frac{M^2+W^2-\mu^2}{2W}$ die Energie des Nukleons im CMS ist.
Die Partialwellenamplituden $f_{\ell\pm}$ zum Gesamtspin $j = \ell \pm \frac{1}{2}$ lassen sich aus f_1 und f_2 nach der Formel

$$(1.10) \qquad f_{\ell\pm} = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{+1} dx \,(f_1(s,x) P_\ell(x) + f_2(s,x) P_{\ell\pm1}(x))$$

errechnen. Man gewinnt (1.10), indem man von der Definition der Partialwellen ausgeht:

$$(1.11) \qquad T = \frac{1}{\pi} \chi_f^+ \sum_\ell (2\ell+1)\,(f_{\ell-}(s)\, O_{\ell-} + f_{\ell+}(s)\, O_{\ell+})\, P_\ell\left(1+\frac{t}{2k^2}\right) \chi_i$$

Die $O_{\ell\pm}$ sind Projektionsoperatoren auf einen Zustand zum Gesamtspin $j = \ell \pm \frac{1}{2}$, ihre explizite Form ist $O_{\ell+} = (\ell+1+\vec{\sigma}\vec{\ell})/(2\ell+1)$ und $O_{\ell-} = (\ell-\vec{\sigma}\vec{\ell})/(2\ell+1)$.

Aus der Unitaritätsbedingung

$$\frac{1}{2i}(T - T^+) = T T^+$$

ergibt sich

$$(1.12) \qquad \operatorname{Im} f_{\ell\pm} = \frac{k}{\sqrt{s}} |f_{\ell\pm}|^2 \qquad \text{für} \quad s \geq (m+\mu)^2$$

solange wir die inelastischen Kanäle unberücksichtigt lassen.
Aus (1.12) folgt

$$(1.13) \qquad f_{\ell\pm} = \frac{\sqrt{s}}{k} e^{i\delta_{\ell\pm}} \sin\delta_{\ell\pm}$$

Bei festem s besteht nach MANDELSTAM[1] für T(s,t) die Dispersionsrelation:

$$(1.14)\quad T(s,t) = \frac{1}{\pi}\int_{4\mu^2}^{\infty}\frac{T_t^{abs}(t',s)}{t'-t}\,dt' + \frac{1}{\pi}\int_{(m+\mu)^2}^{\infty}\frac{T_u^{abs}(u',s)}{u'-u}\,du' + \frac{R_s}{m^2-s} + \frac{R_u}{m^2-u}$$

wobei die Funktionen T_t^{abs} und T_u^{abs} die Imaginärteile der Amplituden im t- bzw. u-Kanal sind. Mit Hilfe der Beziehungen (1.9, 1.10, 1.14) und unter Verwendung von

$$Q_\ell(z) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{P_\ell(z')}{z-z'}\,dz'$$

erhalten wir die Ausgangsformel für unsere Überlegungen:

$$(1.15)\quad f_{\ell\pm}(s) = \frac{1}{2k^2(s)}\times$$

$$\Big[\int_{4\mu^2}^{\infty}(E+m)\left(A_t^{abs}(t',s)+(W-m)B_t^{abs}(t',s)\right)Q_\ell\left(1+\frac{t'}{2k^2}\right)dt'$$

$$-\int_{(m+\mu)^2}^{\infty}(E+m)\left(A_u^{abs}(u',s)+(W-m)B_u^{abs}(u',s)\right)Q_\ell\left(1+\frac{2(m^2+\mu^2)-s-u'}{2k^2}\right)du'$$

$$+\int_{4\mu^2}^{\infty}(E-m)\left(-A_t^{abs}(t',s)+(W+m)B_t^{abs}(t',s)\right)Q_{\ell\pm1}\left(1+\frac{t'}{2k^2}\right)dt'$$

$$-\int_{(m+\mu)^2}^{\infty}(E-m)\left(-A_u^{abs}(u',s)+(W-m)B_u^{abs}(u',s)\right)Q_{\ell\pm1}\left(1+\frac{2m^2+\mu^2-s-u'}{2k^2}\right)du'$$

$$-(E+m)\left(R_u^A+(W-m)R_u^B\right)Q_\ell\left(1+\frac{m^2+2\mu^2-s}{2k^2}\right)-(E-m)\left(-R_u^A+(W+m)R_u^B\right)Q_{\ell\pm1}\left(1+\frac{m^2+2\mu^2-s}{2k^2}\right)\Big]$$

$$+(E+m)\left(R_s^A+(W-m)R_s^B\right)\frac{\delta_{\ell 0}}{m^2-s}+(E-m)\left(-R_s^A+(W-m)R_s^B\right)\frac{\delta_{\ell\pm1,0}}{m^2-s}$$

Dabei zerfällt, entsprechend der Zerlegung nach (1.6), 1.7), jede Amplitude $f_{\ell+}$ bzw $f_{\ell-}$ in zwei Amplituden zum Gesamtisospin I = 3/2 und I = 1/2.

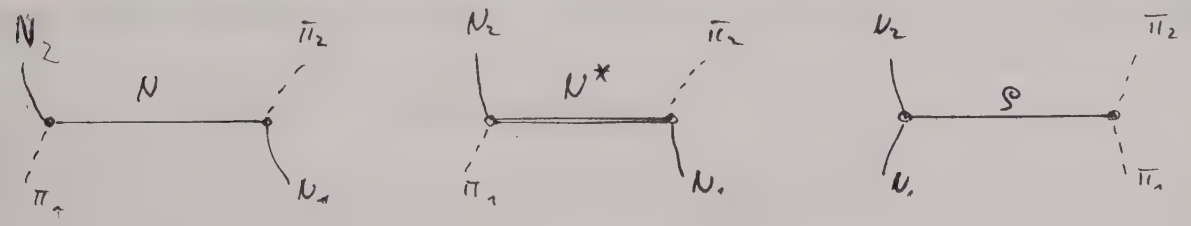
§ 2 Einteilchenaustausch

Um den Imaginärteil der Amplituden im t- und u-Kanal zu bestimmen und damit nach (1.15) die Partialwellen zu berechnen, berücksichtigen wir nur Einteilchenaustauschprozesse.

Im u-Kanal ist das einzige für einen Austausch in Frage kommende Teilchen das Nukleon, andere sind wegen ihrer Quantenzahlen unvereinbar oder bei starker Wechselwirkung nicht stabil. Als nächstes käme ein Zwischenzustand mit einem Nukleon und einem Pion in Betracht. Wir beschreiben den Austausch dieser beiden Teilchen durch Partialwellen mit solchen Quantenzahlen, für die sich das Pion-Nukleonsystem in Resonanz befindet. Dabei behandeln wir die Resonanz als stabiles Teilchen, d.h. mit reeller Masse. Diese Näherung erscheint vernünftig, wenn die Resonanzbreite klein ist gegen die Resonanzenergie. Im u-Kanal betrachten wir daher außer dem Nukleon-Austausch noch den Austausch des $P_{3/2\ 3/2}$-Isobars. Resonanzen mit höherer Energie werden wir nicht berücksichtigen.

Im t-Kanal ist wegen der negativen Parität des Pions der einfachste Zwischenzustand ein Zweipionenzustand. Wir kennen einen Resonanzzustand, mit dem wir diese zwei Pionen beschreiben können: Das ρ -Meson mit $I = 1$ und $J = 1$. Damit wollen wir uns im t-Kanal auch begnügen.

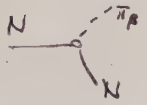
Insgesamt betrachten wir die folgenden drei Austauschprozesse:



a) b) c)

Zunächst wollen wir die Größen A_t^{ab} , A_u^{ab} und B_t^{ab} , B_u^{ab} berechnen, um damit nach (1.15) zu den Partialamplituden für den Austausch dieser Teilchen zu gelangen. Wir machen dabei von der Reduktionstechnik Gebrauch, die jeweils auftretenden Vertizes sind in ihrer Struktur durch Invarianzforderungen eindeutig bestimmt.

a) N-Austausch

Der Vertex 

ist definiert durch

$$(2.1) \qquad \langle 2 | J_\beta(0) | 1 \rangle = g\, \psi_2^* \gamma_5 \tau_\beta \psi_1$$

ψ_2 und ψ_1 sind die Zustände der Nukleonen mit den Impulsen p_2 und p_1. Das Pion hat die Isospin-Komponente β , durch (2.1) wird, wenn jedes der drei Teilchen auf der Massenschale liegt, die sogenannte renormierte π -N-Kopplungskonstante g definiert. Den Ausdruck für den ganzen Prozeß erhält man, indem man (2.1) mit dem entsprechenden Term für den linken Vertex multipliziert, über Spin- und Isospinzustände des Zwischenzustandes summiert und über seine Impulsverteilung *) integriert.

Unter Benutzung von

$$(2.2) \qquad \sum_{\text{Spin}} u^r(p_2)\, \bar{u}^s(p_2) = \frac{p_{20}}{|p_{20}|}\, (\gamma p_2 + m)_{rs}$$

und unter Berücksichtigung der vereinbarten Normierung (1.4) ergibt sich **)

$$T_u^{ab} = -\frac{g^2}{4\pi}\, \frac{1}{2}\, \delta(u - m^2) \times$$

$$(2.3) \qquad \bar{u}(p_2)\, (\delta_{\beta\alpha} - \tfrac{1}{2}[\tau_\beta, \tau_\alpha])\, \tfrac{1}{2}\gamma(q_1 + q_2)\, u(p_1)$$

---

*) Es ist $\int \frac{d^3 p_2}{2|p_{20}|} \ldots = \int d^4 p_2\, \delta(p_2^2 - m^2) \ldots$ zu bilden .

**) In (2.3) enthalten u und $\bar{u}$ auch die Isospinvariablen des ein- bzw. auslaufenden Nukleons.

Für das Nukleon erhalten wir somit das einfache Ergebnis:

$$A_u^{ab} = 0$$

$$B_u^{ab} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{g^2}{4\pi} \frac{1}{2} \delta(u - m^2) \tag{2.4}$$

wobei die obere Komponente für I = 3/2, die untere für I = 1/2 steht. Mit (2.4) und(1.15) gewinnen wir

$$f_{e\pm}^{N} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{g^2}{4\pi} \frac{1}{4k^2} \Big[(E+m)(W-m) Q_e(a) + (E-m)(W+m) Q_{e\pm1}(a) \Big] \tag{2.5}$$

$$a = 1 + \frac{m^2 + 2\mu^2 - s}{2k^2}$$

b) N^*-Austausch

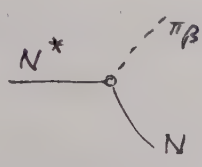
Hier sind die Verhältnisse etwas komplizierter, da wir in der Rechnung einen der Formel (2.2) entsprechenden Ausdruck für ein 3/2-Teilchen zu bestimmen haben. Wir beschreiben das 3/2-Teilchen durch einen Spinvektor ψ_μ, die Diracindizes lassen wir wie beim Nukleonspinor weg. Im Anhang I werden die Bewegungsgleichungen kurz diskutiert. Dort wird gezeigt, daß, wenn M die N^*-Masse ist

$$\sum_{\text{Spin}} \psi_{\mu,r}(p) \bar{\psi}_{\nu,s}(p) = \Big[(\not{p} + m) A_{\mu\nu} \Big]_{rs} \tag{2.6}$$

$$A_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\gamma_\mu\gamma_\nu - \frac{2}{3}\frac{p_\mu p_\nu}{M^2} + \frac{1}{3M}(p_\mu\gamma_\nu - p_\nu\gamma_\mu)$$

Damit können wir die N^*-Austauschamplitude berechnen.
Wieder gehen wir vom Vertex aus,

(2.7)



$$\hat{=}\; g^*(p_1 + q_2)_\mu \psi_\mu^\sigma \frac{3\delta_{\sigma\beta} - \tau_\sigma\tau_\beta}{3} \psi_1$$

Wir benutzen dieselbe Notation wie in (2.1), σ ist hier der Isovektorindex des 3/2 Teilchens (s. Anhang).

Durch eine elementare Überlegung sieht man leicht ein, daß es für diesen Vertex nur eine Kopplung gibt. Das N^* hat positive Parität und den Spin 3/2. Mit dem Spin 1/2 des Nukleons gibt es für das Pion-Nukleonsystem zunächst zwei Möglichkeiten, zum Gesamtdrehimpuls 3/2 zu koppeln: Mit dem Bahndrehimpuls $\ell = 1$ oder $\ell = 2$. Insgesamt muß die Parität des Pion-Nukleonsystems positiv sein, wegen der negativen Parität des Pions kommt daher nur $\ell = 1$ in Frage.

Wie beim Nukleon gehen wir auch hier vor, um zum Imaginärteil der Amplitude zu gelangen. Nach der Summation über die Spins und Isospins und Integration über den Impuls des N^* erhalten wir zunächst

$$T_u^{ab} = \frac{g^{*2}}{4\pi}\frac{1}{6}\,\delta(u-M^2)\,\bar{u}(p_2)\left(2\delta_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}[\tau_\beta,\tau_\alpha]\right)\times$$

(2.8)

$$\times (p_2+q_2)_\mu\,(p_1+q_2)_\nu\,(\not{p}_2-\not{q}_1+M)\,A_{\mu\nu}(p_2-q_1)\,u(p_1)$$

Nach einer elementaren Rechnung gewinnt man aus (2.8):

(2.9)

$$A_u^{ab} = -\left(\frac{1}{4}\right)\frac{g^{*2}}{2\pi}\,\delta(u-M^2)\,(E^*+m)\,\frac{k^{*2}}{9}\times$$

$$\times\left[\frac{3(M+m)}{E^*+m}\left(1+\frac{2(m^2+\mu^2)-s-M^2}{2k^{*2}}\right)+\frac{M-m}{E^*-m}\right]$$

$$B_u^{ab} = \left(\frac{1}{4}\right)\frac{g^{*2}}{4\pi}\,\delta(u-M^2)\,(E^*+m)\,\frac{k^{*2}}{9}\times$$

$$\times\left[\frac{3}{E^*+m}\left(1+\frac{2(m^2+\mu^2)-s-M^2}{2k^{*2}}\right)-\frac{1}{E^*-m}\right]$$

mit $k^* = k(M^2)$ und $E^* = E(M^2)$

Daraus erhalten wir mit (1.15) die N^* -Austauschamplitude:

$$(2.10)\qquad f_{\ell\pm}^{N^*} = -\left(\frac{1}{4}\right)\frac{g^{*2}}{4\pi}\,\frac{E^*+m}{3k^2(s)}\,k^{*2}\cdot$$

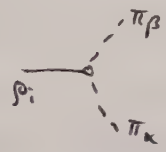
$$\cdot\Big[Q_\ell(a)(E+m)\Big(\frac{W-2m-M}{E^*+m}\,3a^* - \frac{W-2m+M}{E^*-m}\Big)$$

$$+\,Q_{\ell\pm1}(a)(E-m)\Big(\frac{W+2m+M}{E^*+m}\,3a^* - \frac{W+2m-M}{E^*-m}\Big)\Big]$$

mit
$$a = 1+\frac{2(m^2+\mu^2)-s-M^2}{2k^2(s)}$$
$$a^* = 1+\frac{2(m^2+\mu^2)-s-M^2}{2k^{*2}}$$

c) ρ -Austausch

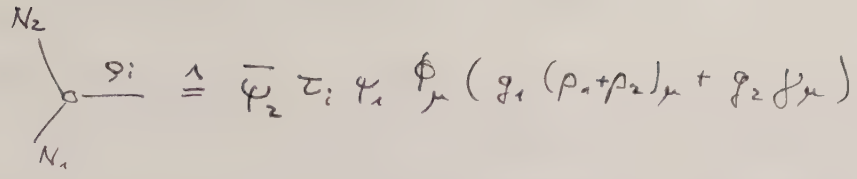
Hier treten zwei verschiedene Vertizes auf, nämlich der ρNN -Vertex und der $\rho\pi\pi$ -Vertex. Beim letzteren gibt es wieder nur eine Ankopplung:

$$(2.11)\qquad \text{  } \;\hat{=}\; f_{\rho\pi\pi}\, i\varepsilon_{i\beta\kappa}\,\bar{\phi}_\mu\,(q_1+q_2)_\mu$$

ϕ_μ ist der Polarisationsvektor des ρ -Mesons.

Die Eindeutigkeit läßt sich auch hier elementar begründen: Die beiden Pionen bilden eine p-Welle, um im Gesamtspin und in der Parität mit den entsprechenden Quantenzahlen des ρ -Mesons übereinzustimmen.

Indessen gibt es für den ρNN -Vertex zwei Ankopplungen, da die beiden Nukleonen sowohl einen Singulett- wie einen Triplettzustand bilden können. Für den Bahndrehimpuls ist in beiden Fällen nur $\ell = 1$ erlaubt, weil das ρ-Meson negative Parität und den Spin 1 hat. Wir führen die Kopplungskonstanten g_1 und g_2 durch den folgenden Ausdruck ein:

(2.12) 

$$\hat{=}\ \bar{\psi}_2 \tau_i \psi_1 \phi_\mu \left(g_1 (p_1+p_2)_\mu + g_2 \gamma_\mu \right)$$

Mit $\sum_{\text{Spin}} \phi_\mu(p)\, \bar{\phi}_\nu(p) = -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m_\rho^2}$ erhalten

wir aus (2.11) und (2.12)

(2.13)
$$T_t^{ab} = \frac{f_{\rho\pi\pi}}{4\pi} \delta(t - m_\rho^2) \times$$
$$\times \bar{u}(p_2) \tfrac{1}{2} [\tau_\beta, \tau_\alpha] \left(g_1 (s + \tfrac{t}{2} - m^2 - \mu^2) + g_2 \tfrac{1}{2} \gamma (q_1 + q_2) \right) u(p_1)$$

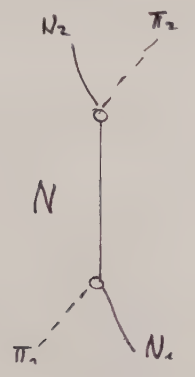
Von den Kopplungskonstanten $f_{\rho\pi\pi}$, g_1 und g_2 weiß man aus dem Zerfall des ρ-Mesons experimentell $f_{\rho\pi\pi}^2/4\pi \approx 2$, über g_1 und g_2 ist nichts Genaueres bekannt. Der Einfachheit wegen setzen wir $g_1 = 0$, ebenso willkürlich verfügen wir über g_2, indem wir das Produkt $f_{\rho\pi\pi} \cdot g_2/4\pi = 1$ setzen. Diese Willkür ist in unseren Rechnungen nicht gravierend, da der Austausch des ρ-Mesons praktisch ohne Einfluß auf die Ergebnisse bleibt.

Den ρ-Austausch beschreiben wir somit durch die folgende Amplitude:

(2.14)
$$f_{\ell\pm}^{\rho} = \left(\frac{-1}{2}\right) \frac{1}{2k^2(s)} \Big[(E+m)(W-m) Q_\ell \left(1 + \frac{m_\rho^2}{2k^2}\right)$$
$$+ (E-m)(W+m) Q_{\ell\pm1} \left(1 + \frac{m_\rho^2}{2k^2}\right) \Big]$$

§ 3 Nukleon Pol und 3-3-Resonanz

Nach welchem Verfahren wir auch die Partialwellenamplituden berechnen mögen, immer muß die Unitaritätsbedingung (1.12) erfüllt sein, außerdem muß ein Pol in einer Partialamplitude dort auftreten, wo ein gebundener Zustand mit den entsprechenden Quantenzahlen vorliegt. Wir betrachten das Nukleon als einen gebundenen Zustand des Pion-Nukleon-Systems. Ein Pol an der Stelle $s = m^2$ muß demnach auftreten in der Partialwelle mit den Quantenzahlen $I = 1/2$, $j = 1/2$ und $\ell = 1$. Daß der Pol in der p-Welle und nicht in der s-Welle auftritt, rührt von der Pseudoskalarität des π-Mesons her.



Der Nukleonpol entspricht demnebenstehenden Graphen. Das Residuum läßt sich unter Benutzung von (2.3) sofort bestimmen, denn zu dieser Formel gelangten wir ja durch die Kenntnis der Quantenzahlen des Nukleons. Wir haben in (2.3) lediglich die Ersetzung $q_1 \longleftrightarrow -q_2$ und $\alpha \longleftrightarrow \beta$ vorzunehmen (das entspricht dem Übergang vom Austauschgraphen zum hier interessierenden direkten Graphen) und erhalten somit anstelle von (2.4)

$$(3.1) \qquad B_s^{ab} = \frac{g^2}{4\pi}\,\frac{1}{2}\,\delta(s-m^2)\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$$

$$\text{d.h.} \qquad B_s = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}\frac{g^2}{4\pi}\,\frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{m^2-s}$$

Führen wir unter Benutzung von (1.9) die Partialwellenprojektion (1.10) aus, so liefert natürlich nur die $P_{1/2\,1/2}$ Amplitude einen Beitrag zum Residuum, d.h. nur diese Amplitude ist dort von Bedeutung und hat in der unmittelbaren Nachbarschaft des Punktes $s = m^2$ die Form:

$$(3.2) \qquad f_{1-}^{(1/2)} = -\frac{3}{2}\,\mu^2\,\frac{g^2/4\pi}{m^2-s}$$

Die 3-3-Resonanz beschreiben wir durch eine BREIT-WIGNER Formel. Wir machen für die $P_{3/2\,3/2}$-Amplitude einen Ansatz, welcher in der unmittelbaren Umgebung des Punktes $s = M^2$ auf dem oberen Rand des physikalischen Blattes Gültigkeit haben soll und der Forderung nach Unitarität genügt:

$$f_{1+}^{(3/2)} = \frac{M^2}{k^*} \frac{\Gamma}{M^2 - s - i\Gamma M} \tag{3.3}$$

Um die in (2.7) definierte Kopplungskonstante g^* mit der eingeführten Breite Γ zu verknüpfen, verfahren wir ähnlich wie beim Nukleon. Nach der Ersetzung $\alpha \longleftrightarrow \beta$ und $q_1 \longleftrightarrow -q_2$ geht (2.9) über in

$$A_s^{abs} = -\binom{3}{0} \frac{g^{*2}}{2\pi} \delta(s-M^2)(E^*+m)\frac{k^{*2}}{9} \tag{3.4}$$

$$\times\left[\frac{3(M+m)}{E^*+m}\left(1+\frac{2(m^2+\mu^2)-u-M^2}{2k^{*2}}\right)+\frac{M-m}{E^*-m}\right]$$

$$B_s^{abs} = -\binom{3}{0} \frac{g^{*2}}{2\pi} \delta(s-M^2)(E^*+m)\frac{k^{*2}}{9}$$

$$\times\left[\frac{3}{E^*+m}\left(1+\frac{2(m^2+\mu^2)-u-M^2}{2k^{*2}}\right)-\frac{1}{E^*-m}\right]$$

Mit (1.9) und (1.10) gewinnen wir daraus

$$\mathrm{Im}\, f_{1+}^{(3/2)c} = -\frac{g^{*2}}{4\pi}\frac{4}{3}k^{*2}M(E^*+m)\pi\delta(s-M^2) \tag{3.5}$$

Der Index c soll bedeuten, daß dieser Imaginärteil aus (2.9) unter Benutzung der Crossingsymmetrie erhalten wurde. In der δ-Funktion kommt zum Ausdruck, daß wir im Austauschgraphen die Resonanz als stabiles Teilchen behandelt haben.

Wir haben (3.5) mit dem Imaginärteil von (3.3) zu vergleichen:

$$\text{(3.6)} \qquad \mathrm{Im}\, \rho_{1+}^{(3/2)} = \frac{\Gamma M^2}{k^*} \frac{\Gamma M}{(M^2-s)^2 + \Gamma^2 M^2}$$

Wann ΓM hinreichend klein ist, so strebt dieser Ausdruck gegen $\Gamma M^2/k^* \cdot \pi\, \delta(s - M^2)$ *). Durch Vergleich mit (3.5) erhalten wir den Zusammenhang:

$$\text{(3.7)} \qquad \frac{g^{*2}}{4\pi} = - \frac{3M\Gamma}{4k^{*3}(E^*+m)}$$

*) Streng gilt die Beziehung $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = \pi \delta(x)$.

§ 4 Näherungsweise selbstkonsistente Berechnung von m^2, M^2, $g^2/4\pi$ und Γ.

Um die Partialwellen zu berechnen, machen wir den N/D Ansatz[7], d.h. wir stellen die Amplitude $f_{\ell\pm}$ als Quotienten zweier Funktionen dar, wobei die Nennerfunktion $D_{\ell\pm}$ nur den rechten Schnitt, die Zählerfunktion $N_{\ell\pm}$ nur die linken Schnitte haben soll. Im übrigen Gebiet sollen beide Funktionen regulär sein. Unter diesen Voraussetzungen gelten die Beziehungen

$$\text{(4.1a)} \quad \operatorname{Im} N_{\ell\pm} = D_{\ell\pm} \operatorname{Im} f_{\ell\pm} \qquad \text{auf den linken Schnitten,}$$

aus der elastischen Unitarität (1.12) folgt

$$\text{(4.1b)} \quad \operatorname{Im} D_{\ell\pm} = -\frac{k}{\sqrt{s}} N_{\ell\pm} \qquad \text{auf dem rechten Schnitt.}$$

Wäre Im $f_{\ell\pm}$ auf den linken Schnitten bekannt, so könnte man aus den sich ergebenden gekoppelten Integralgleichungen für N und D die Amplitude ausrechnen.

Unsere Näherung besteht darin, daß wir die linken Schnitte der Amplitude durch die Amplituden der Einteilchenaustauschprozesse wiedergeben, d.h. wir gehen aus von

$$\text{(4.2)} \quad \operatorname{Im} f_{\ell\pm} = \operatorname{Im} f_{\ell\pm}^{B} := \operatorname{Im} \left(f_{\ell\pm}^{N} + f_{\ell\pm}^{N^*} + f_{\ell\pm}^{P} \right)$$

wobei auf der rechten Seite die in § 2 angegebenen Amplituden stehen (2.5, 2.10, 2.14). Ihre Summe wollen wir kurz als Bornsche Amplitude bezeichnen, da die nach den Feynmanschen Regeln zu errechnende Bornsche Näherung mit diesen Amplituden übereinstimmt.

Mit dem Ansatz (4.2) wird bei vorgegebenen Massen und Kopplungskonstanten der ausgetauschten Teilchen eine Berechnung der Funktionen $N_{\ell\pm}$ und $D_{\ell\pm}$ und damit der Amplitude $f_{\ell\pm} = N_{\ell\pm}/D_{\ell\pm}$ möglich. Wie schon oben bemerkt, hat man zwei gekoppelte Integralgleichungen für N und D zu lösen.

Eine solche Rechnung wurde von ABERS und ZEMACH[5] durchgeführt, aus der Lösung gewinnt man eine Amplitude, deren Sprung über die linken Schnitte genau mit dem Sprung der Bornschen Amplitude übereinstimmt (für das Schnittbild der Bornschen Amplitude s. Anhang II).

Auf den kurzen Schnitten der positiv reellen s-Achse ist diese Eigenschaft wünschenswert, da wir dort noch am meisten dieser Bornschen Amplitude Vertrauen schenken dürfen. Erfahrungsgemäß wird nämlich die Pion-Nukleonamplitude bei niedrigen Energien beherrscht vom Nukleonpol bei $s = m^2$ und von der 3-3-Resonanz bei $s = M^2$. Der kurze Nukleonschnitt in der Partialwellenamplitude wird allein erzeugt durch den Pol bei $u = m^2$ (das entspricht dem Nukleonaustauschgraphen a) auf Seite 9), der kurze N^*-Schnitt praktisch allein durch den Pol bei $u = M^2$ (Graph b) auf Seite 9). Wir dürfen daher (4.2) in diesem Gebiet als gute Näherung ansehen.

Jedoch gibt es keinen Grund, längs der negativ reellen Achse auf die Übereinstimmung der Sprünge dieser Bornschen und der entgültigen Amplitude besonderen Wert zu legen, da dort Beiträge anderer Partialwellen und höherer Energien auftreten. Das Anwachsen der Bornschen Amplitude für große Werte von $|s|$ steht im Widerspruch zur Unitarität. Für große $|s|$ ist (4.2) daher bestimmt falsch.

Als nachteilig betrachten wir beim exakten N/D Verfahren die Tatsache, daß man wegen der Divergenz der Integrale gezwungen ist, einen Abschneideparameter einzuführen. Die Ergebnisse hängen von dessen Wahl erheblich ab, und es scheint kein brauchbares Argument zu geben , um diesen Parameter genauer festzulegen. Er ist daher als freier Parameter zu betrachten.

Da wir die Pion-Nukleonamplitude im Niederenergiebereich bestimmen wollen, sollten wir unsere Bemühungen wenigstens darauf richten, das Schwellenverhalten zu erfüllen. Aus der Quantenmechanik ist bekannt,

daß sich bei der Streuung an einem Potential die Streuphase δ_ℓ der ℓ -ten Partialwelle für $k \to 0$ wie $k^{2\ell+1}$ verhält. Dieses Verhalten zeigen auch die Partialwellenamplituden der Mandelstam-Darstellung *). In einem exakten N/D-Verfahren ist jedoch das Schwellenverhalten nicht erfüllt.

Wir wählen daher in dieser Arbeit einen anderen, einfacheren Weg, um zur Amplitude zu gelangen. Wir setzen[8]

$$N_{\ell\pm} = f_{\ell\pm}^{B} = f_{\ell\pm}^{N} + f_{\ell\pm}^{N^*} + f_{\ell\pm}^{\rho} \tag{4.3}$$

Aus (4.1b) ergibt sich daraus

$$D_{\ell\pm}(s) = \frac{s-s_0}{s_1-s_0} + \frac{s-s_1}{s_0-s_1} D_{\ell\pm}(s_0) - \frac{(s-s_0)(s-s_1)}{\pi} \int_{(m+\mu)^2}^{\infty} \frac{k(s')\, f_{\ell\pm}^{B}(s')\, ds'}{\sqrt{s'}\,(s'-s_0)(s'-s_1)(s'-s)} \tag{4.4}$$

Wir haben zwei Subtraktionen vorgenommen, bei $s = s_1$ normierten wir $D_{\ell\pm}$ auf Eins. Da $f_{\ell\pm}^{N^*}$ sich für große s wie s log s verhält, müssen wir eine weitere Subtraktion durchführen, damit das Integral konvergiert. Auch für die Nukleon- und ρ -Austauschamplitude bewirkt diese zweite Subtraktion eine Dämpfung der Beiträge höherer Energie, was nach obigen Ausführungen wünschenswert erscheint. Auf den Zusammenhang der Subtraktionskonstanten $D_{\ell\pm}(s_0)$ mit den Streulängen kommen wir noch genauer zurück. Vom physikalischen Standpunkt aus ist, so glauben wir,

---

*) Für diese Partialwellen treten immer Integrale von der Form (1-15) auf. Wegen des asymptotischen Verhaltens der Legendre Polynome zweiter Art folgt für die Amplitude $f_\ell \sim k^{2\ell}$ für $k \sim 0$, so daß aus (1.13) $\delta_\ell \sim k^{2\ell+1}$ folgt.

diese vereinfachte Behandlung des N/D-Ansatzes vertretbar. Denn so lange man als Näherung für die linken Schnitte nur Einteilchenaustausch prozesse betrachtet, ist, wie oben diskutiert, der Sprung der Bornschen Amplitude allein auf den kurzen Schnitten ernst zu nehmen. Die Sprünge der Bornschen und der von uns errechneten Amplitude stimmen dort aber näherungsweise überein, wenn wir irgendwo auf einem der kurzen Schnitte $D_{\ell\pm} = 1$ setzen. Es stellt sich nämlich heraus, daß $D_{\ell\pm}(s)$ in diesem Bereich nur eine schwach veränderliche Funktion ist *) . Nach diesem Gesichtspunkt haben wir in (4.4) den Punkt s_1 zu wählen.

Darüber hinaus ergeben sich wesentlich rechnerische Vorteile: Es bereitet keine Schwierigkeiten, die Massen des Nukleons und des N^* sowie deren Kopplungskonstanten gleichzeitig selbstkonsistent zu berechnen. Man sieht sich also nicht genötigt, etwa in der $P_{1/2\,1/2}$-Amplitude zur Berechnung des Nukleonpoles die Masse und Breite der 3-3-Resonanz vom Experiment als gegeben anzunehmen, wie es von ABERS und ZEMACH[5] durchgeführt wurde.

Schließlich hat die Amplitude $f_{\ell\pm} = f_{\ell\pm}^B / D_{\ell\pm}$ das richtige Schwellenverhalten, da $f_{\ell\pm}^B$ (damit auch $f_{\ell\pm}^B / D_{\ell\pm}$) mit $k^{2\ell}$ gegen Null geht (vgl. Fußnote auf S. 20). Das erlaubt eine Aussage über die Subtraktionskonstanten $D_{\ell\pm}(s_0)$. Durch die Subtraktion haben wir einen Parameter für jede Partialwelle eingeführt. Wählt man aber für s_0 die elastische Schwelle, dann ist $D_{\ell\pm}(s_0)$ reell und steht in einfachem Zusammenhang mit der Streulänge.

Gehen wir von der Definition für die Streulänge aus

$$(4.5)\qquad \lim_{s \to (m+\mu)^2} \frac{k^{2\ell+1}(s)\,\cot\delta_{\ell\pm}}{\sqrt{s}} = \frac{\mu}{a_{\ell\pm}}$$

---

*) Wie wir aus den weiteren Ausführungen sehen, läßt sich diese Aussage auf den Nukleonschnitt in der 1-1-Amplitude nicht aufrecht erhalten. An gegebener Stelle kommen wir genauer darauf zurück.

so gelangen wir in unserer Näherung, da wir uns nur für die $P_{1/2\,1/2}$ und $P_{3/2\,3/2}$-Amplitude interessieren, zu den Beziehungen:

$$\lim \frac{k^2}{f_{1-}^{1/2\,B}} \cdot \lambda_1 = \frac{\mu}{a_{11}} \tag{4.6}$$

$$\lim \frac{k^2}{f_{1+}^{3/2\,B}} \cdot \lambda_3 = \frac{\mu}{a_{33}}$$

mit $\lambda_1 = D_{1-}^{1/2}((m+\mu)^2)$

$\lambda_3 = D_{1+}^{3/2}((m+\mu)^2)$

Die Grenzwerte der linken Seite lassen sich bei bekannten Kopplungskonstanten unmittelbar aus den Formeln (2.5, 2.10, 2.14) bestimmen. Wir fassen noch einmal kurz die Eigenschaften der Amplitude $f_{\ell\pm} = f_{\ell\pm}^B / D_{\ell\pm}$ zusammen:

1) Sie ist unitär, denn für $s \geq (m+\mu)^2$

ist $\operatorname{Im} f_{\ell\pm} = -f_{\ell\pm}^B \operatorname{Im} D_{\ell\pm} / |D_{\ell\pm}|^2 = \frac{k}{\sqrt{s}} |f_{\ell\pm}|^2$

2) Sie hat das richtige Schwellenverhalten
(s. Fußnote Seite 20)

3) Die linken Schnitte stimmen mit denen von $f_{\ell\pm}^B$ überein, für den Sprung gilt $\operatorname{Im} f_{\ell\pm} = \operatorname{Im} f_{\ell\pm}^B / D_{\ell\pm}$.

Wir erwarten von dieser Amplitude, daß sie für $J = \frac{1}{2}$, $I = \frac{1}{2}$ und $\ell = 1$ einen Pol unterhalb der Schwelle auf der reellen Achse hat, d.h., daß $D_{1-}^{1/2}$ dort eine Nullstelle besitzt. Die Lage bzw. das Residuum dieses Poles würden wir dann als Nukleonmasse bzw. als π-N-Kopplungskonstante bezeichnen. Ebenso erwarten wir für $J = \frac{3}{2}$, $I = \frac{3}{2}$ und $\ell = 1$ oberhalb der Schwelle ein Resonanzverhalten, d.h. daß $\operatorname{Re} D_{1+}^{3/2}$ dort eine Nullstelle hat. Die Lage und Breite der Resonanz würden wir als N^*-Masse und N^*-Breite bezeichnen, die sich, wie auch die Lage und das Residuum des Nukleonpoles, aus $f_{\ell\pm}$ errechnen läßt. Selbstkonsistenz ist dann erreicht, wenn diese Größen, also die Lage und das Residuum des

Nukleonpoles bzw. die Lage und Breite des N^*, genau mit den auf dem linken Schnitt eingesetzten Massen und Kopplungskonstanten der ausgetauschten Teilchen übereinstimmen.

Da der Nukleonpol auf dem kurzen Nukleonschnitt (vgl. Anhang II) liegt, kann von einer Übereinstimmung der Sprünge von f^B und f^B/D im 1-1-Kanal auf dem Nukleonschnitt keine Rede mehr sein. Die Forderung nach Selbstkonsistenz scheint zu einer komplexen π-N-Kopplungskonstanten zu führen. Diese Schwierigkeit tritt in einem exakten N/D-Verfahren nicht auf: N ist nach (4.1a) stets reell, wenn D verschwindet. Da uns aber die Einfachheit der Rechnung reizt, behelfen wir uns dadurch, daß wir für $s = m^2$ die Nukleonaustauschamplitude durch ihren Realteil ersetzen, d.h. wir lassen $\mathrm{Im}\, f_{1-}^{1/2\,B}(m^2)$ unberücksichtigt. Diese Willkür läßt sich durch die Tatsache rechtfertigen, daß $\mathrm{Im}\, f_{1-}^{1/2\,B}(s)$ unmittelbar neben der Stelle $s = m^2$ verschwindet (für $m^2 = 49\,\mu^2$ hat der Imaginärteil zwischen $49\,\mu^2$ und $50{,}4\,\mu^2$ eine Nullstelle). Nähme man nämlich eine leichte Inkonsistenz in der Nukleonmasse in Kauf, indem man für die Outputmasse des Nukleons die Nullstelle des Imaginärteils der Nukleonaustauschamplitude wählt, so wäre diese Schwierigkeit behoben. An Hand der numerischen Ergebnisse dieser Arbeit läßt sich abschätzen, daß sich bei einer solchen Behandlung die Werte für die N^*-Masse $g^2/4\pi$ und Γ nur unwesentlich ändern würden.

Somit fordern wir die Beziehungen:

$$(4.7)\qquad \frac{f_1^B}{D_1} := \frac{\mathrm{Re}\, f_{1-}^{1/2\,B}}{D_{1-}^{1/2}} = -\frac{g^2}{4\pi}\,\frac{3\mu^2}{2}\,\frac{1}{m^2-s}$$

$$\frac{f_3^B}{D_3} := \frac{f_{1+}^{3/2\,B}}{D_{1+}^{3/2}} = \frac{M^2}{k^*}\,\frac{\Gamma}{M^2-s-i\Gamma M}$$

Daraus lesen wir sofort ab

(4.8a) $$D_1(m^2) = 0$$

(4.8b) $$\mathrm{Re}\, D_3(M^2) = 0$$

Entwickeln wir die Nennerfunktion bei $s = m^2$ bzw. $s = M^2$, so erhalten wir aus

(4.9)
$$\frac{f_1^B}{(s-m^2)D_1'(m^2)} = -\frac{g^2}{4\pi}\frac{3\mu^2}{2}\frac{1}{m^2-s}$$

$$\frac{f_3^B}{(s-M^2)D_3'(M^2)+i\,\mathrm{Im}\,D_3(M^2)} = \frac{M^2}{k^*}\frac{\Gamma}{M^2-s-i\Gamma M}$$

die Konsistenzgleichungen

(4.8c) $$\frac{f_1^B(m^2)}{D_1'(m^2)} = \frac{3\mu^2}{2}\frac{g^2}{4\pi}$$

(4.8d) $$\frac{f_3^B(M^2)}{\mathrm{Re}\,D_3'(M^2)} = -\frac{M^2}{k^*}\Gamma$$

Wir haben demnach vier Gleichungen (4.8a - d) für die sechs Größen m^2, M^2, Γ, $g^2/4\pi$, λ_1 und λ_3. Wenn wir zwei dieser Größen fest vorgeben, können wir versuchen, die vier anderen zu bestimmen. Außer in den Massen sind die vier Gleichungen in den gesuchten Größen linear bzw. gebrochen linear, also verhältnismäßig einfach aufzulösen. Wir geben daher die Massen vor. Aus (4.6) können wir dann mit den berechneten Werten für $g^2/4\pi$, Γ, λ_1 und λ_3 die Streulänge a_{11} bzw. a_{33} bestimmen und mit dem Experiment vergleichen. Daß sich dieses Verfahren rechnerisch so einfach durchführen läßt, liegt an unserer Näherung; bei einer exakten Durchführung der N/D-Methode wäre eine solche Rechnung nicht möglich.

Wir benötigen für den Nukleon- und Isobarenaustausch die Partialwellenamplituden ohne den Faktor $g^2/4\pi$ bzw. Γ und definieren:

$$g_{1\pm}^{N} := \frac{1}{g^2/4\pi} f_{1\pm}^{N} \qquad g_{1\pm}^{N^*} := \frac{1}{\Gamma} f_{1\pm}^{N^*}$$

Mit den Bezeichnungen

$$\underline{I}^{N}(s) = \frac{(s-s_0)(s-s_1)}{\pi} \int_{(m+\mu)^2}^{\infty} \frac{k(s')\, g_{1-}^{1/2\,N}(s')\, ds'}{\sqrt{s'}\,(s'-s_0)(s'-s_1)(s'-s)}$$

$$\underline{I}^{N^*}(s) = \frac{(s-s_0)(s-s_1)}{\pi} \int_{(m+\mu)^2}^{\infty} \frac{k(s')\, g_{1-}^{1/2\,N^*}(s')\, ds'}{\sqrt{s'}\,(s'-s_0)(s'-s_1)(s'-s)}$$

$$\underline{I}^{\beta}(s) = \frac{(s-s_0)(s-s_1)}{\pi} \int_{(m+\mu)^2}^{\infty} \frac{k(s')\, f_{1-}^{1/2\,\beta}(s')\, ds'}{\sqrt{s'}\,(s'-s_0)(s'-s_1)(s'-s)}$$

$$K^{N}(s) = \frac{(s-s_0)(s-s_1)}{\pi} \int_{(m+\mu)^2}^{\infty} \frac{k(s')\, g_{1+}^{3/2\,N}(s')\, ds'}{\sqrt{s'}\,(s'-s_1)(s'-s_0)(s'-s)}$$

$$K^{N^*}(s) = \frac{(s-s_0)(s-s_1)}{\pi} \int_{(m+\mu)^2}^{\infty} \frac{k(s')\, g_{1+}^{3/2\,N^*}(s')\, ds'}{\sqrt{s'}\,(s'-s_0)(s'-s_1)(s'-s)}$$

$$K^{\beta}(s) = \frac{(s-s_0)(s-s_1)}{\pi} \int_{(m+\mu)^2}^{\infty} \frac{k(s')\, f_{1+}^{3/2\,\beta}(s')\, ds'}{\sqrt{s'}\,(s'-s_0)(s'-s_1)(s'-s)}$$

gehen wegen (4.4) die Bedingungen (4.8a) und (4.8b) über in

$$\frac{m^2-s_0}{s_1-s_0} + \frac{m^2-s_1}{s_0-s_1}\lambda_1 - \frac{g^2}{4\pi}\underline{I}^{N}(m^2) - \Gamma \underline{I}^{N^*}(m^2) - \underline{I}^{\beta}(m^2) = 0$$

(4.10)

$$\frac{M^2-s_0}{s_1-s_0} + \frac{M^2-s_1}{s_0-s_1}\lambda_3 - \frac{g^2}{4\pi}K^{N}(M^2) - \Gamma K^{N^*}(M^2) - K^{\beta}(M^2) = 0$$

Wir können den Fall ausschließen, daß der Ausdruck

$\underline{I}^{N}(m^2) K^{N^*}(M^2) - \underline{I}^{N^*}(m^2) K^{N}(M^2)$ verschwindet *) . Dann

---

*) Sollte dieser Fall dennoch für ein m^2 und M^2 eintreten, dann müßte man für m^2 oder M^2 andere Werte einsetzen, um dieser Schwierigkeit auszuweichen.

erhalten wir aus (4.10) die Gleichungen

$$g^2/4\pi = \alpha' \lambda_1 + \beta' \lambda_3 + \gamma' \tag{4.11}$$
$$\Gamma = \alpha \lambda_1 + \beta \lambda_3 + \gamma$$

Die Koeffizienten der rechten Seite lassen sich aus (4.10) nach der Kramerschen Regel ablesen.

Die Konsistenzbedingungen (4.8c) und (4.8d) haben die Struktur

$$\frac{\delta\, g^2/4\pi + \varepsilon\, \Gamma + \zeta}{\eta\, g^2/4\pi + \vartheta\, \Gamma + \kappa} = g^2/4\pi \tag{4.12}$$
$$\frac{\delta'\, g^2/4\pi + \varepsilon'\, \Gamma + \zeta'}{\eta'\, g^2/4\pi + \vartheta'\, \Gamma + \kappa'} = \Gamma$$

Wir benutzen die Definitionen

$$\delta = \frac{2}{3\mu^2}\, g_{1-}^{1/2\,N}(m^2) \qquad \delta' = -\frac{M^2}{k^*}\, g_{1+}^{3/2\,N}(M^2)$$

$$\varepsilon = \frac{2}{3\mu^2}\, g_{1-}^{1/2\,N^*}(m^2) \qquad \varepsilon' = -\frac{M^2}{k^*}\, g_{1+}^{3/2\,N^*}(M^2)$$

$$\zeta = \frac{2}{3\mu^2}\, f_{1-}^{1/2\,P}(m^2) \qquad \zeta' = -\frac{M^2}{k^*}\, f_{1+}^{3/2\,P}(M^2)$$

$$\eta = -\frac{d}{ds}\, I^N(s)\Big|_{m^2} \qquad \eta' = -\frac{d}{ds}\, K^N(s)\Big|_{M^2}$$

$$\vartheta' = -\frac{d}{ds}\, I^{N^*}(s)\Big|_{m^2} \qquad \vartheta' = -\frac{d}{ds}\, K^{N^*}(s)\Big|_{M^2}$$

$$\kappa = \frac{1-\lambda_1}{s_1 - s_0} - \frac{d}{ds}\, I^P(s)\Big|_{m^2} \qquad \kappa' = \frac{1-\lambda_3}{s_1 - s_0} - \frac{d}{ds}\, K^P(s)\Big|_{M^2}$$

Die Forderung nach Selbstkonsistenz führt mit (4.11) und (4.12) zu zwei rationalen Gleichungen für λ_1 und λ_3 :

(4.13)
$$\frac{(\delta\alpha' + \varepsilon\alpha)\lambda_1 + (\varepsilon\beta + \delta\beta')\lambda_3 + (\delta\gamma' + \varepsilon\gamma + \zeta)}{(\eta\alpha' + \vartheta\alpha)\lambda_1 + (\eta\beta' + \vartheta\beta)\lambda_3 + (\eta\gamma' + \vartheta\gamma + \kappa)} = \alpha'\lambda_1 + \beta'\lambda_3 + \gamma'$$

$$\frac{(\delta'\alpha' + \varepsilon'\alpha)\lambda_1 + (\varepsilon'\beta + \delta'\beta')\lambda_3 + (\delta'\gamma' + \varepsilon'\gamma + \zeta')}{(\eta'\alpha' + \vartheta'\alpha)\lambda_1 + (\eta'\beta' + \vartheta'\beta)\lambda_3 + (\eta'\gamma' + \vartheta'\gamma' + \kappa')} = \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_3 + \gamma$$

Durch Elimination einer der beiden Konstanten, etwa λ_1 , gewinnen wir ein Polynom vierten Grades in λ_3 . Zu jeder Nullstelle ergibt sich mit dem dazugehörigen λ_1 aus (4.11) eine Kopplungskonstante und eine Breite. In der verwandten Näherung sind demnach im allgemeinen vier selbstkonsistente Lösungen zu erwarten.

Natürlich hängen die Lösungen von der genauen Wahl der Subtraktionsstelle s_1, an der wir D_3 und D_1 gleich Eins setzten, ab. Wir glauben, es ist naheliegend, dafür das rechte Ende des kurzen N^* -Schnittes zu wählen, weil dann D_3 auf dem kurzen Nukleonschnitt, welcher rechts vom N^* -Schnitt liegt, weniger von Eins abweicht, als wenn wir irgendeine andere Stelle auf dem N^* -Schnitt wählten. Und unser Bestreben ist ja, daß auf beiden kurzen Schnitten die Imaginärteile von f^B und f^B/D - das ist in unserm Verfahren die endgültige Amplitude - möglichst gut überein stimmen.

Im 1-1-Kanal läßt sich das auf dem Nukleonschnitt nicht erreichen, es scheint uns daher sinnvoll, s_1 auf dem kurzen N^* -Schnitt zu wählen.

§ 5 Numerisches

In der numerischen Rechnung verwendeten wir die folgenden experimentellen Größen

$$\mu^2 = 138 \text{ MeV}$$
$$m_\rho^2 = 30\,\mu^2$$
$$f_{\pi\pi}\, g_{\rho NN}/4\pi = 1 \qquad \text{(vergl. 2.14)}$$

Die in (4.10) auftretenden Hauptwertintegrale wurden auf einer Zuse-23 nach der Simpsonformel berechnet. Als Schrittlänge wählten wir $0,5\,\mu^2$ im Bereich $(m+\mu)^2 \leq s \leq (m+\mu)^2 + 50\,\mu^2$ *), darüber begnügten wir uns mit 50 Stützpunkten, deren Abstand $32\,\mu^2$ betrug. Eine Variation der Schrittlängen und Schrittzahl bewirkte keine nennenswerten Veränderungen der Integrale. Die Ableitungen der Integrale in (4.12) wurden durch numerisches Differenzieren gewonnen.

Wir untersuchten verschiedene Werte der Nukleonmasse und dazu jeweils einen größeren Bereich der N^*-Masse. Wie in § 4 ausführlich diskutiert wurde, entschieden wir uns für eine Subtraktion auf dem kurzen N^*-Schnitt und setzten dort $D_3 = D_1 = 1$. Die beiden Subtraktionskonstanten λ_1 und λ_3 ergeben sich aus der Subtraktion an der Schwelle. Es zeigte sich, daß jedes Wertepaar der Massen in (4.13) zu vier Lösungen von λ_1 und λ_3 führte.

Drei der vier Nullstellen des Polynoms vierten Grades, welches sich aus (4.13) für λ_3 ergibt, lagen immer sehr dicht beieinander. Die gewöhnlichen Näherungsmethoden erwiesen sich als unzureichend, doch glücklicherweise lassen sich die Nullstellen eines Polynoms vierten Grades noch allgemein durch Radikale bestimmen, so daß dieses Problem keine Schwierigkeiten bereitete.

---

*) Bei den Integralen K^N, K^{N^*} und K^ρ wurde die Schrittlänge so modifiziert, daß die Polstelle des Integranden genau zwischen zwei Stützpunkte zu liegen kam.

Aus jedem Paar λ_1 und λ_3, welches (4.13) befriedigt, erhält man mit (4.11) eine selbstkonsistente Lösung für die Breite Γ und die Kopplungskonstante $g^2/4\pi$. Wir stellten die bemerkenswerte Tatsache fest, daß für alle untersuchten Massen sich immer nur eine Lösung als physikalisch sinnvoll erwies. Bei den drei verbleibenden Lösungen waren entweder die Breite oder die Kopplungskonstante oder beide nagativ.

In den graphischen Darstellungen sind die in Frage kommenden Ergebnisse zusammengestellt. Die Übereinstimmung mit dem Experiment ist nicht besonders gut. Die Kopplungskonstante und die Breite sind um ca. 40% zu groß, die Streulängen, die sich aus den Subtraktionskonstanten mit (4.6) bestimmen lassen, sind beide fast zweimal größer als der experimentelle Wert, wenn die Nukleon- und N^* -Masse an die experimentellen Werte gerückt werden. Berücksichtigt man aber die Inelastizität sehr pauschal, indem man oberhalb der inelastischen Schwelle statt der Unitaritätsbeziehung (1.12) die Beziehung $\mathrm{Im}\, f_{l\pm} = \frac{k}{\sqrt{s}} |f_{l\pm}|^2 \frac{\sigma_{tot}}{\sigma_{el}}$ verwendet und $\frac{\sigma_{tot}}{\sigma_{el}} = 2$ setzt, so erreicht man eine bessere Übereinstimmung. Wir setzten diesen Wert für $s \geq (m+\mu)^2 + 50\,\mu^2$ ein (diese spezielle Wahl beruht auf rechentechnischen Gründen), bei $m = 940$ MeV entspricht das $W \geq 1450$ MeV.

Bei den angegebenen Daten wurde für die Normierungssubtraktionsstelle das rechte Ende des N^* -Schnittes gewählt. Entscheidet man sich für eine andere Stelle auf dem N^* -Schnitt, so wird die Diskrepanz mit den experimentellen Werten noch größer. Die Kopplungskonstante und die Breite nehmen um weitere 50% zu, wenn man am linken Ende des N^* -Schnittes subtrahiert. Allerdings ist dann auch, wie schon in §4 erwähnt, die Crossingsymmetrie auf dem Nukleonschnitt weniger gut erfüllt, so daß wir dem rechten Ende des N^* -Schnittes den Vorzug geben möchten *). Versuchsweise wurde die Normierungssubtraktion

---

*) Die Crossingsymmetrie bedeutet kein sehr starkes Argument. Mit den experimentellen Massen ergibt sich für $1/D_3$ auf dem Nukleonschnitt im Mittel 1,54, wenn man am rechten Ende des N^* -Schnittes subtrahiert, und 1,67 bei der Subtraktion links.

auch bei $s_1 = -50$ vorgenommen. Dort überlagern sich die Schnitte des Nukleons, des N^* und des ϱ -Mesons. Erstaunlicherweise weicht dann der Wert der Kopplungskonstanten nur geringfügig von dem in den graphischen Darstellungen angegebenen Wert ab, die Breite ist etwa doppelt so groß. Doch scheint dieses Ergebnis eher zufällig zu sein, da die Streulängen nur noch eine qualitative Übereinstimmung zeigen. Immerhin ist die Feststellung beruhigend, daß sich bei Variation von s_1 über einen weiten Bereich (wir untersuchten auch Punkte zwischen -50 und dem N^* -Schnitt) weder physikalisch sinnlose Resultate ergeben noch die Ergebnisse sich um Größenordnungen verändern.

§ 6 Schlußfolgerungen

Die schon von anderen Autoren[1] getroffene Feststellung, daß der Nukleonaustausch den Hauptbeitrag zur 3-3-Resonanz liefert, während umgekehrt der Nukleonpol seine Existenz dem Austausch der Resonanz verdankt, behält hier natürlich ihre Gültigkeit. Der Einfluß des ρ-Mesonenaustausches ist praktisch vernachlässigbar.

Darüber hinaus lassen sich in unserer Arbeit die Beiträge hoher Energien besser überblicken. Wir führten die zweite Subtraktion durch, um diese Beiträge abzuschwächen, jedoch war nicht zu erwarten, daß ihr Einfluß dadurch vernachlässigbar würde. Denn zumindest für den N^*-Austausch gewährleistet erst diese zweite Subtraktion die Konvergenz der Integrale.

In der Tat zeigten die Integrale des Nukleonaustausches bei Verdoppelung des Integranden oberhalb der inelastischen Schwelle nur kleine Veränderungen, während die des N^*-Austausches bis zu 50% vom ursprünglichen Wert abwichen. Es erscheint aber nicht sinnvoll, durch weitere Subtraktionen diesem Dilemma zu begegnen, da dann wegen der neu eingeführten Parameter die selbstkonsistente Rechnung an Aussagewert verliert.

In diesem Zusammenhang müssen wir feststellen, daß auch unsere Rechnung keine reine selbstkonsistente Rechnung darstellt, da wir noch zwei überzählige Parameter haben. Jedoch lieferte unsere Arbeit das befriedigende Ergebnis: Gibt man für zwei der Parameter ihre experimentellen Werte vor, dann führt die selbstkonsistente Rechnung zu vernünftiger Übereinstimmung mit dem Experiment auch für die übrigen vier Parameter.

Die Tatsache, daß die pauschale Berücksichtigung der Inelastizität eine Verbesserung aller Resultate bewirkt, läßt vermuten, daß auch inelastische Prozesse einen Beitrag liefern, der nicht zu vernachlässigen ist.

Erfreulicherweise zeigt der Chew-Low-Plot, welcher sich mit der gewonnenen 3-3-Amplitude aufzeichnen läßt, nur eine geringfügige Abweichung von einer Geraden. Dies ist ein Hinweis darauf, daß neben den relevanten Abschnitten des Plots (Streulänge, Kopplungskonstante) die Amplitude auch in ihrer ganzen Struktur für niedere Energien den gewohnten Vorstellungen entspricht.

Wir erheben mit dieser Arbeit nicht den Anspruch, einen Nachweis dafür geführt zu haben, daß die sogenannte Bootstrap-Philosophie ihre Richtigkeit hat, etwa, daß das Nukleon den Namen "Elementarteilchen" nicht verdiene. Jedoch kann diese Arbeit als ein Hinweis gedeutet werden, daß sich durch die Partialwellendispersionsrelationen die Experimente beschreiben lassen.

Herrn Prof. Dr. F. Penzlin möchte ich für sein förderndes Interesse an dieser Arbeit danken. Herrn Dr. I. Bender danke ich herzlich für viele wertvolle Diskussionen.

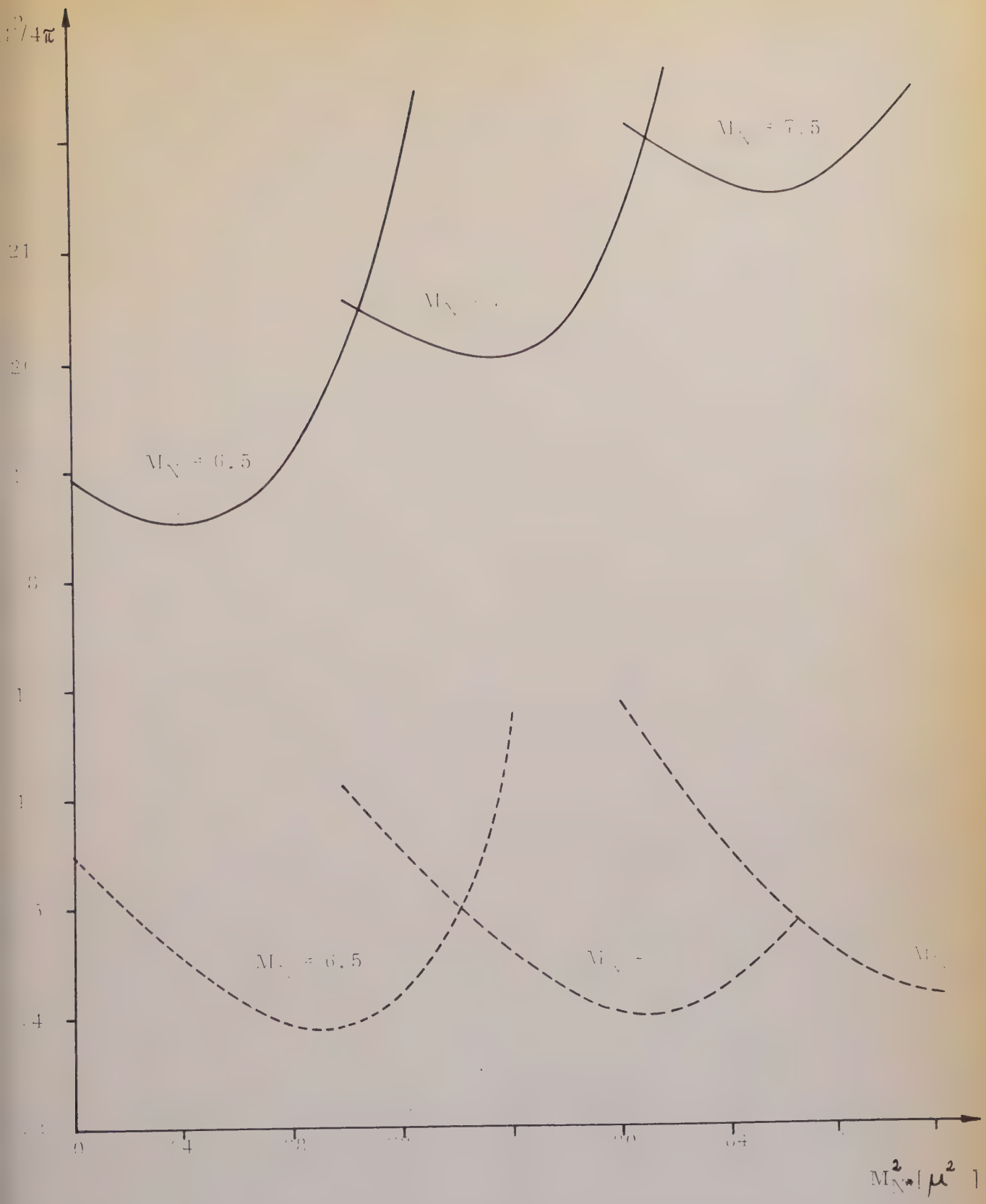


Fig. 1a: Abhängigkeit der selbstkonsistenten Kopplungskonstanten von der Resonanzmasse bei verschiedenen Nukleonmassen

Ausgezogene Kurve: $\sigma_{tot}/\sigma_{el} \equiv 1$

Gestrichelte Kurve: $\sigma_{tot}/\sigma_{el} = 2$ für $s \geq (M+\mu)^2 + 50\mu^2$

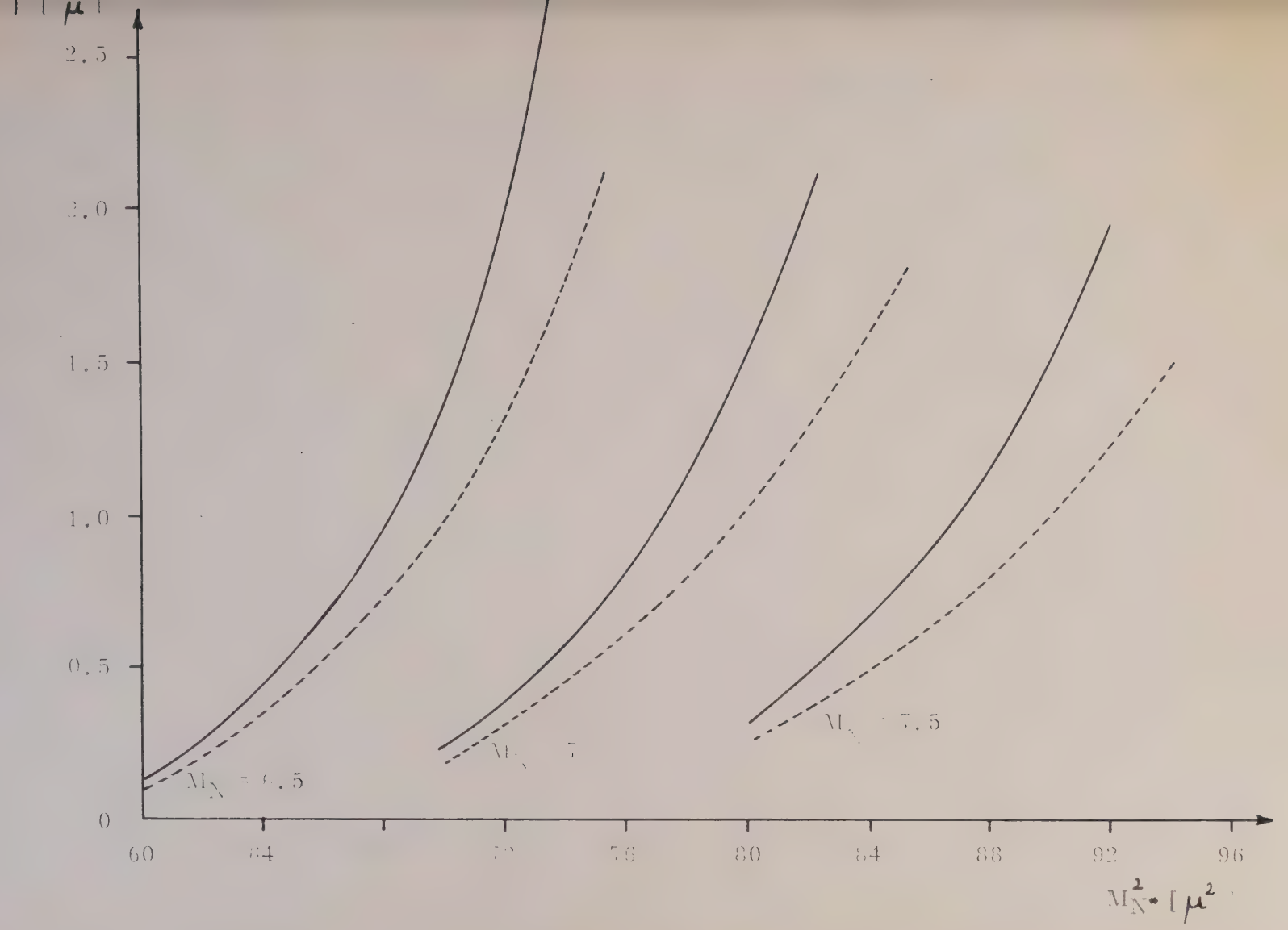


Fig. 1b: Abhängigkeit der selbstkonsistenten Breite von der Resonanzmasse bei verschiedenen Nukleonmassen

Ausgezogene Kurven: $\sigma_{tot} \sigma_{el} \equiv 1$ Gestrichelte Kurven: $\sigma_{tot} \sigma_{el} \geq 2$ für $s \geq (M_N + \mu)^2 + 50\mu^2$

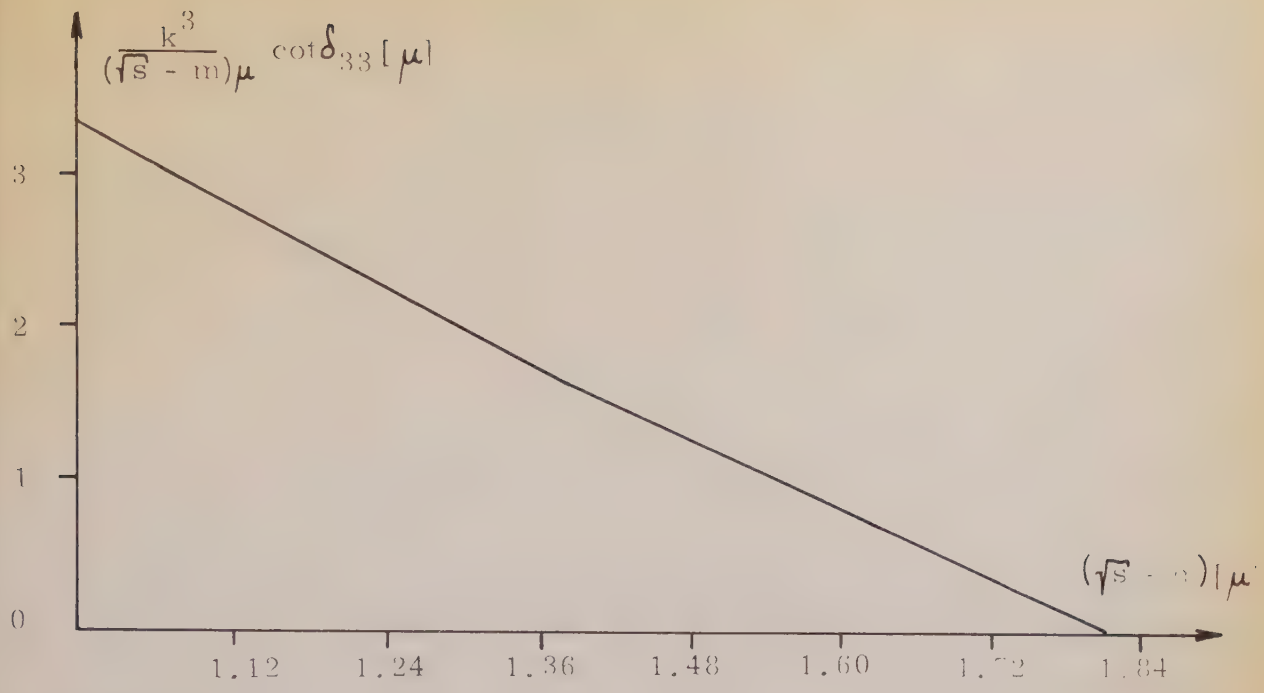


Fig. 2: Chew - Low - Plot

	$g^2/4\pi$	Γ [MeV]	a_{11} [μ^{-1}]	a_{33} [μ^{-1}]
$\sigma_{tot} / \sigma_{el} \equiv 1$	20	185	- 0.06	0.398
$\sigma_{tot} / \sigma_{el} = 2$ für $W \geq 1450$ MeV	14	120	- 0.05	0.290
exp. Wert	~ 14	~ 100	- 0.104 ± 0.006	0.215 ± 0.004

Tabelle

Ergebnisse der Rechnung für den Fall, daß der experimentelle Wert der Nukleon- und N^* - Masse vorgegeben ist.

Anhang I

Teilchen mit Spin 3/2

Ein Teilchen vom Spin 3/2 läßt sich durch einen Spinor mit Vektorindex beschreiben. Die Bewegungsgleichungen sind

$$(\gamma p - M)\,\psi_\mu = 0 \qquad \mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

$$\gamma_\mu \psi^\mu = 0$$

daraus folgt $\quad p_\mu \psi^\mu = 0$

Ein Spinor mit Vektorindex transformiert sich allgemein nicht nach einer irreduziblen Darstellung. Erst durch die Nebenbedingung $\gamma_\mu \psi^\mu = 0$ wird der Anteil, welcher sich mit Spin 3/2 transformiert, herausprojiziert. Wir benötigen den Ausdruck $\sum_{spin} \psi_\alpha \bar{\psi}_\beta$ für ein 3/2-Teilchen. Er ist bei geeigneter Normierung identisch mit dem Projektionsoperator auf den Spin 3/2-Raum und auf den Raum für positive Energien. Demnach haben wir

$$\sum_{spin} \psi_\alpha(p)\bar{\psi}_\beta(p) = \frac{\gamma p + M}{2M}\,\frac{\vec{J}^2 - \frac{3}{4}}{3}$$

wobei $\vec{J}^2$ der Drehimpulsoperator in relativistischer Verallgemeinerung ist.

Die rechte Seite können wir berechnen. Die infinitesimalen Drehoperatoren lauten in relativistischer Verallgemeinerung:

$$J^\kappa = \varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} p_\lambda S_{\mu\nu}$$

Offensichtlich gilt $p_\kappa J^\kappa = 0$. In unserem speziellen Fall sind die $S_{\mu\nu}$ gegeben durch

$$(S_{\mu\nu})_\alpha^\beta = \frac{i}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)_\alpha^\beta + i(g_{\mu\alpha}g_\nu^\beta - g_{\nu\alpha}g_\mu^\beta)$$

Damit gewinnt man

$$(\mathcal{J}^2)^\beta_\alpha = -(\mathcal{J}_{12}\mathcal{J}^{12})^\beta_\alpha = \frac{15}{4} g_\alpha^\beta - \gamma_\alpha\gamma^\beta - 2\frac{p_\alpha p^\beta}{M^2}$$

$$+ \frac{\not{p}}{M^2}(p_\alpha\gamma^\beta - \gamma_\alpha p^\beta)$$

und schließlich

$$\sum_{Spin} \psi_\alpha \bar{\psi}_\beta = \frac{\not{p}+M}{2M}\left(g_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\gamma_\alpha\gamma_\beta - \frac{2}{3}\frac{p_\alpha p_\beta}{M^2} + \frac{1}{3M}(p_\alpha\gamma_\beta - p_\beta\gamma_\alpha)\right)$$

Im Ruhesystem nimmt der Projektor $\frac{\mathcal{J}^2 - 3/4}{3}$ die folgende Form an:

$$\frac{\mathcal{J}^2 - 3/4}{3} = \frac{3\delta_{ik} - \sigma_i\sigma_k}{3}$$

Diesen Ausdruck verwendeten wir in (2.7) im Isospinraum.

Anhang II

Schnitte

Außer den Verzweigungspunkten von kinematischen Faktoren haben die Austauschamplituden Verzweigungspunkte dort, wo das Argument der Legendre Funktionen zweiter Art den Wert +1 oder -1 annimmt.

a) Nukleonenaustausch

Es ist (2.5)

$$a = 1 + \frac{m^2 + 2\mu^2 - s}{2k^2(s)}$$

$$a = -1 + \frac{(m^2-\mu^2)/s - m^2}{2k^2(s)}$$

Daraus lesen wir ab

$$a = 1 \text{ für } s = m^2 + 2\mu^2$$

$$a = -1 \text{ für } s = \frac{(m^2-\mu^2)^2}{m^2}$$

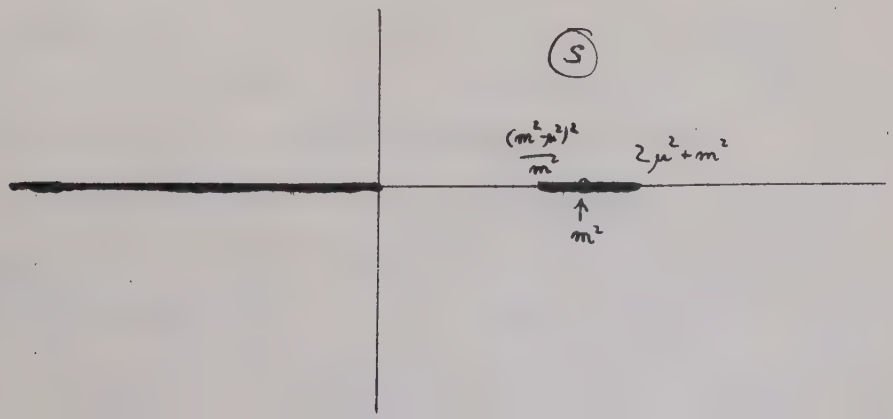
Außerdem wird $k^2(s)$ bei $s = 0$ und $s = \infty$ Unendlich, so daß außerdem gilt

$$a = 1 \text{ für } s = 0$$

$$a = -1 \text{ für } s = \infty$$

Wir erhalten somit vier Verzweigungspunkte auf der reellen s-Achse, im Komplexen liegen keine vor. Die Schnitte legen wir ebenfalls auf die reelle Achse, weil dann der Sprung der Amplitude einfach zu berechnen ist.

Damit ergibt sich folgendes Schnittbild:



b) N^* -Austausch

$$a = 1 + \frac{2(m^2+\mu^2) - M^2 - s}{2k^2(s)}$$

$$a = -1 + \frac{(m^2-\mu^2)^2/s - M}{2k^2(s)}$$

Wie beim Nukleon liegen auch hier vier Verzweigungspunkte auf der reellen s-Achse.

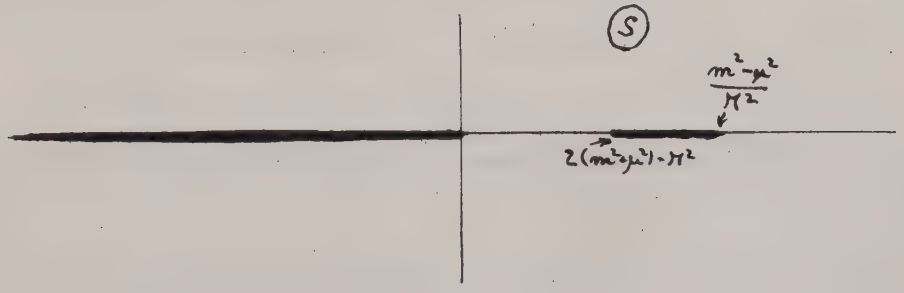
$a = 1$ für $s = 2(m^2 + \mu^2) - M^2$

und für $s = 0$

$a = -1$ für $s = (m^2 - \mu^2)^2 / M^2$

und für $s = \infty$

Mit den gleichen Argumenten wie bei den Nukleonschnitten ergibt sich vom N^* -Austausch folgendes Schnittbild



c) ρ -Austausch (2.15)

$$a = 1 + \frac{m_\rho^2}{2k^2(s)}$$

Auf der reellen s-Achse liegen zwei Verzweigungspunkte, bei $s = 0$ und $s = \infty$. Es gibt außerdem noch zwei Punkte in der komplexen s-Ebene, für die $a = -1$ ist. Dort muß der Imaginärteil von $k^2(s)$ verschwinden, mit $s = re^{i\varphi}$ findet man aus der Formel

$4k^2 = s - 2(m^2+\mu^2) + \frac{(m^2-\mu^2)^2}{s}$ die Beziehung

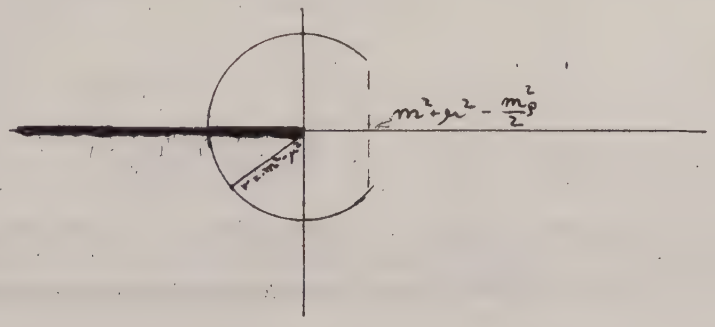
$r \sin\varphi = \frac{(m^2-\mu^2)^2}{r} \sin\varphi$ d.h. $r = m^2 - \mu^2$

Aus der Forderung $a = -1$ gewinnt man

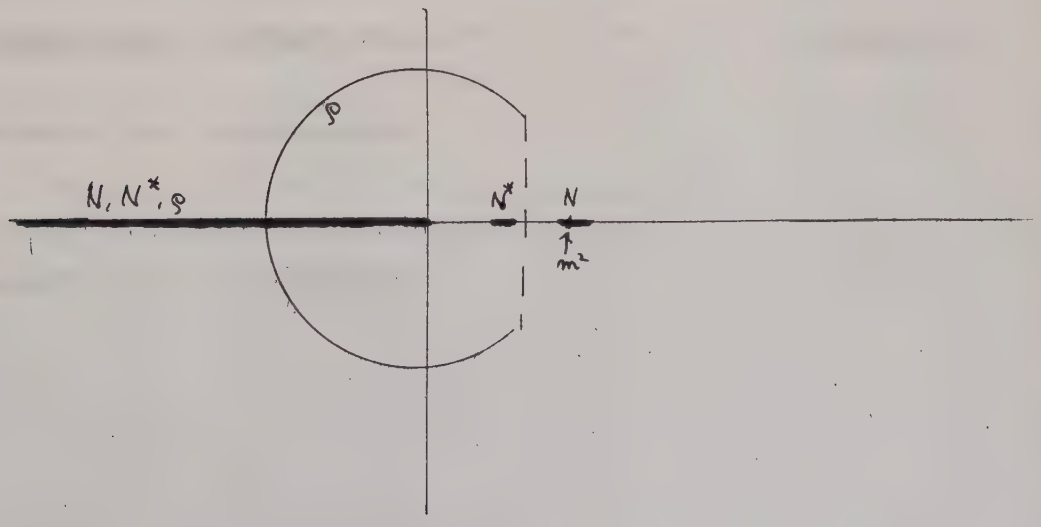
$$\cos\varphi = \frac{m^2+\mu^2-m_\rho^2/2}{m^2-\mu^2}$$

Wir haben demnach zwei Verzweigungspunkte auf einem Kreis um den Ursprung mit dem Radius $r = m^2 - \mu^2$ und den Realteilen $m^2 + \mu^2 - \frac{m_\rho^2}{2}$. Wir legen den Schnitt auf diesen Kreis, weil für alle m_ρ^2 mit $4\mu^2 < m_\rho^2 < 4m^2$ die Verzweigungspunkte auf diesem Kreis liegen würden, auf dem Kreis ist $k^2(s)$ reell.

Das Schnittbild vom ρ -Austausch:



Die Summe der drei betrachteten Austauschamplituden führt zu dem Schnittbild



Literatur-Verzeichnis

1) MANDELSTAM, S., Phys. Rev. 112, 1344 (1958)

2) FRAZER, W.R., J.R. FULCO, Phys. Rev. 119, 1420 (1960)
MAC DOWELL, S.W., Phys. Rev. 116, 774 (1960)

3) CHEW, G.F., S-Matrix Theory of Strong Interaction
OMNES, R., FROISSART, M., Mandelstam Theory and Regge Poles, beide Benjamin Inc. Publishers, New York

4) FRAUTSCHI, S.C., WALECKA, J.D., Phys. Rev. 120, 1486 (1960)

5) BALAZS, L.A.P., Phys. Rev. 128, 1935 (1962)
ABERS, A., ZEMACH, C., Phys. Rev. 131, 2305 (1963)
NARAYANASWAMI, P., Lalit Kumar PANDE, Phys. Rev. 136, B 1760 (1964)

6) CHEW, F.G., FRAUTSCHI, S.C., Phys. Rev. Zeff. 7, 395, (1961)

7) CHEW, G.F., MANDELSTAM, S., Phys. Rev. 119, 467 (1960)

8) ZACHARIASEN, F., ZEMACH, Ch., Phys. Rev. 128, 84 (1962)

Lebenslauf

Am 26. August 1939 wurde ich, Dieter Heiß, als Sohn des Diplom-Landwirtes August Heiß und seiner Ehefrau Hildegard, geb. Kühner, in Donaueschingen geboren. Nach vier Jahren Volksschule besuchte ich dort das Gymnasium, wo ich 1958 die Reifeprüfung ablegte.

Im Sommersemester 1958 immatrikulierte ich mich an der Universität Heidelberg für das Fach Physik. In Heidelberg machte ich im November 1963 die Diplom-Physiker-Prüfung.

Seit Januar 1964 bin ich am Institut für Theoretische Physik der Freien Universität Berlin angestellt.

Im Juli 1964 heiratete ich Frau Sigrid Heiß, geb. Koll, im Mai 1965 wurde unsere Tochter Silke geboren.